УДК 621.391.1 : 621.394.74–503.5

АНАЛИЗ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ ОДНОГО АЛГОРИТМА СВОБОДНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА, УСТОЙЧИВОГО К ВОЗДЕЙСТВИЮ ШУМОВ

Евсеев Г. С., Тюрликов А. М.

Рассматривается синхронная система свободного множественного доступа в широковещательный канал связи, действие шума в котором приводит к возникновению ложных конфликтов. Предлагается алгоритм управления доступом в канал, позволяющий передавать информацию с ненулевой скоростью при любой вероятности возникновения ложного конфликта, отличной от единицы.

§ 1. Введение

В настоящее время имеется довольно большое число работ, в которых исследуются характеристики алгоритмов свободного множественного доступа (СМД) в условиях воздействия шумов, приводящих к возникновению ложных конфликтов [1–3]. Одной из основных характеристик алгоритмов СМД является пропускная способность системы, определяемая как верхняя грань скоростей передачи, при которых возникающие на станциях пакеты передаются с конечной средней задержкой.

Для известных алгоритмов СМД [1–3] существует такая вероятность ложного конфликта, начиная с которой пропускная способность системы обращается в нуль. В настоящей работе предлагается модификация неулучшенного двоичного симметричного алгоритма разрешения конфликта (АРК) из [4]. Для предлагаемой модификации в явном виде построены верхняя и нижняя оценки пропускной способности, из которых следует, что данный алгоритм позволяет передавать по каналу связи пакеты абонентов с ненулевой скоростью и конечной средней задержкой при любой вероятности возникновения ложного конфликта, отличной от единицы.

§ 2. Модель системы

Предполагается, что имеется бесконечное число станций, на каждой из которых возникают пакеты, предназначенные для передачи по каналу связи, вход и выход которого доступны всем абонентам. Время передачи по каналу разделено на интервалы (окна), длительности которых равны времени передачи одного пакета и принимаются за единицу времени. Предполагается, что станциям известны границы окон и при передаче границы пакета совпадают с границами окон. Общее число пакетов, появившихся в системе в окне t, является случайной величиной ρ_t, распределенной по закону Пуассона со средним значением λ.

Случайные величины ρ_t независимы при различных t. В каждом окне возможны три события: П – отсутствие передачи, У – передача одного пакета, К – конфликт, т. е. наложение пакетов, переданных одновременно несколькими станциями. Число пакетов, образующих конфликт, называется его кратностью.

Наблюдая выход канала к моменту $t+1$, станции выносят решение о событии, которое имело место в окне t. Действие шума приводит к тому, что принятое решение может быть ошибочным. Аналогично работам [1, 2] ограничимся рассмотрением ошибок типа ложных конфликтов, т. е. ошибок вида П→К, У→К, вероятности каждой из которых положим равными q. Кроме того, будем полагать, что в различных окнах ошибки статистически независимы.

Работа станций аналогично АРК из [1] имеет две фазы: свободную фазу и фазу разрешения конфликта. В свободной фазе появившийся у станции пакет сразу передается в канал. Фаза разрешения конфликта начинается с момента возникновения конфликта и заканчивается, когда все участники конфликта успешно передадут пакеты. Работа в фазе разрешения конфликта аналогична работе АРК из [1] с добавлением следующего пункта.

Если станциями принимается решение о том, что в окне произошел конфликт, то генерируется значение случайной величины J_t, принимающей значения 1 и 0 с вероятностями соответственно γ и $1-\gamma$. При $J_t=1$ все станции, участвующие в конфликте, в следующем окне повторяют передачу, а при $J_t=0$ действуют в соответствии с АРК.

Для определения момента окончания конфликта значения J_t должны быть известны всем станциям. Это обеспечивается использованием на всех станциях синхронно работающих датчиков псевдослучайных чисел. Величина γ является параметром алгоритма и при $\gamma=0$ алгоритм совпадает с АРК из [1, 4].

§ 3. Построение оценок для пропускной способности алгоритма

Рассмотрим случайную величину τ_k — время разрешения конфликта заданной кратности k. Для фиксированных значений q и γ введем обозначения

$$T_k(q, \gamma)=\mathbf{M}[\tau_k],$$

$C(q, \gamma)$ — пропускная способность алгоритма.

Из работы [4] следует, что

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{k}{T_k(q, \gamma)} < C(q, \gamma) < \limsup_{k\to\infty} \frac{k}{T_k(q, \gamma)}. \tag{1}$$

Здесь и далее $\liminf$ обозначает нижний предел, $\limsup$ — верхний предел.

Кроме того, для $q=0$ и $\gamma=0$ из [1] имеем

$$0{,}3461 < C(0{,}0) < 0{,}3472. \tag{2}$$

Цель дальнейшего изложения — показать, как из (1) и (2) можно в явном виде получить оценки для $C(q, \gamma)$.

Рассмотрим конфликт кратности $k\geqslant 2$ и пометим произвольно выбранный пакет из k участвующих в конфликте пакетов. В дальнейшем этот пакет будем называть меченым.

Определим событие A следующим образом:

$$A=\begin{cases}\text{за время разрешения конфликта кратности } k\\ \text{меченый пакет участвовал в конфликте кратности } 2\end{cases}.$$

Введем обозначение $P_k(q, \gamma)$ для вероятности события A при фиксированных q и γ.

При $q\in[0, 1)$ и $\gamma\in(2-1/q, 1)$, $\gamma\geqslant 0$ справедливы следующие утверждения.

1. Среднее время разрешения конфликта кратности 0 и 1 при условии, что в окне был ложный конфликт, определяется формулой

$$T_0(q, \gamma)=T_1(q, \gamma)=\frac{2-\gamma}{1-q(2-\gamma)}.$$

2. При сделанных предположениях

$$T_2(q, \gamma)=\frac{2(2-\gamma-q-q\gamma(1-\gamma)/2)}{(1-\gamma)(1-q(2-\gamma))}. \tag{3}$$

3. Вероятность события A не зависит от q и γ, а именно

(4) $$P_k(q, \gamma)=P_k(0,0).$$

4. Для любого $k\geqslant 3$ справедливо равенство

(5) $$T_k(q, \gamma)=T_{k-1}(q, \gamma)+\psi(q, \gamma)P_k(q, \gamma)T_2(q, \gamma),$$

где $\psi(q, \gamma)=2(1-q)/(2-q(1+\gamma))$.

Отметим, что ограничения, связывающие значения q и γ, необходимы для обеспечения конечности среднего времени разрешения ложных конфликтов. При нарушении неравенства $\gamma>2-1/q$ среднее время разрешения ложного конфликта бесконечно и пропускная способность обращается в нуль. При $q=1$ или $\gamma=1$ никакой конфликт не будет разрешен.

Из утверждения 4 следует, что для любого $k\geqslant 3$

$$T_k(q, \gamma)=\psi(q, \gamma)T_2(q, \gamma)\sum_{i=3}^{k}P_i(q, \gamma)+T_2(q, \gamma).$$

Учитывая (4), имеем

$$T_k(q, \gamma)=\psi(q, \gamma)T_2(q, \gamma)\sum_{i=3}^{k}P_i(0, 0)+T_2(q, \gamma)=$$

$$=\psi(q, \gamma)T_2(q, \gamma)/T_2(0, 0)T_k(0, 0)+qT_1(q, \gamma).$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Для любых* $q\in[0, 1)$, $\gamma\in(2-1/q, 1)$ *и* $k\geqslant 3$ *справедливо равенство*

(6) $$T_k(q, \gamma)=\varphi^{-1}(q, \gamma)T_k(0,0)+qT_1(q, \gamma),$$

где

$$\varphi(q, \gamma)=\frac{(1-\gamma)(1-q(2-\gamma))\cdot 2}{(1-q)(2-\gamma)}.$$

Пользуясь тем фактом, что $T_k(0,0)$ не зависит от q и γ, а $\varphi(q, \gamma)$ не зависит от k, из (6) на основе (1) и (2) получаем оценки для пропускной способности алгоритма

(7) $$C(q, \gamma)>\varphi(q, \gamma)\cdot 0{,}3461=C^-(q, \gamma),$$

(8) $$C(q, \gamma)<\varphi(q, \gamma)\cdot 0{,}3472=C^+(q, \gamma).$$

§ 4. Доказательство утверждений

При доказательстве утверждений будем пользоваться следующей схемой описания процесса разрешения конфликта. Рассмотрим конфликт произвольной кратности k. Пусть $G(X)$ — дерево с множеством вершин X. Каждой вершине $x\in X$ будем ставить во взаимнооднозначное соответствие окно из фазы разрешения конфликта.

Введем следующие обозначения: $\tau(G)$ — число вершин в дереве $G(X)$, за вычетом корневой вершины, т. е. $\tau(G)=\tau_k$; $\xi(x)$ — кратность конфликта в окне, соответствующем вершине x; $t(x)$ — номер окна, которому соответствует вершина x; $f(x)$ — случайная величина, принимающая на вершине x значение 1 с вероятностью q и значение 0 с дополнительной вероятностью $1-q$, для различных вершин случайные величины $f(x)$ статистически независимы;

$$\eta(x)=\begin{cases}\xi(x), & \text{если } f(x)=0,\\ 2, & \text{если } f(x)=1.\end{cases}$$

Кроме того, на вершинах, для которых $\eta(x)\geqslant 2$, зададим случайную величину $J(x)$, которая с вероятностью γ принимает значение 1 и с дополнительной вероятностью $(1-\gamma)$ — значение 0.

Для описания дерева $G(X)$ укажем правило, в соответствии с которым для каждой вершины $x \in X$ может быть построено множество вершин $\Gamma(x)$, следующих непосредственно за вершиной x.

Для произвольной вершины $x \in X$ возможны следующие случаи.

1. Если $\eta(x) \leqslant 1$, то $\Gamma(x) = \varnothing$, т. е. x — концевая вершина.
2. Если $\eta(x) \geqslant 2$ и $J(x) = 1$, то $\Gamma(x) = \{x_0\}$, причем $\xi(x_0) = \xi(x)$.
3. Если $\eta(x) \geqslant 2$ и $J(x) = 0$, то $\Gamma(x) = \{x_1, x_2\}$, причем $\xi(x_1) = I$, $\xi(x_2) = \xi(x) - I$.

При этом I есть случайная величина, распределенная по биномиальному закону:

$$\Pr(I=i) = C_n^i 2^{-n}, \quad \text{где} \quad n = \xi(x), \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Таким образом, используя правило для построения множества $\Gamma(x)$, можно, исходя из начальной вершины, построить дерево $G(X)$.

В множестве X выделим множества

$$E = \{x \in X : f(x) = 1\}, \qquad \bar{E} = X \setminus E,$$

L — множество вершин из X, соответствующих окнам, в которых передавался меченый пакет.

Доказательство утверждений 1 и 2 на основе рассмотрения дерева $G(X)$ при $k=0$ и $k=1$ аналогично доказательству соответствующих утверждений из [1, 4] и поэтому опускается.

Доказательство утверждения 3. Заметим, что, как следует из определения события A, $P_2(q, \gamma) = P_2(0,0)$ для любых q и γ. Зафиксируем некоторые значения $k \geqslant 3$, q, γ и рассмотрим величину $P_k(q, \gamma)$. Для краткости обозначений будем опускать содержимое скобок у P_k.

Из построения $G(X)$ следует, что

$$P_k = (1-\gamma)\, 2^{-k} \left(2P_k + 2C_{k-1}^1 (P_{k-1} + P_2) + \sum_{i=2}^{k-3} C_{k-1}^i (P_{i+1} + P_{k-i}) \right) + \gamma P_k.$$

Проводя преобразования, получаем

$$P_k = \sum_{i=1}^{k-2} C_{k-1}^i P_{i+1} / (2^{k-1} - 1). \tag{9}$$

Поскольку P_2 не зависит от q и γ, то из (9) следует, что для любого $k \geqslant 2$, P_k не зависит от q и γ, что и требовалось доказать.

Утверждение 3 можно пояснить следующим образом. Во всех окнах до окна с событием A включительно, в которых передается меченый пакет, происходит конфликт кратности не менее 2. Поэтому ни воздействие шума, которое характеризуется вероятностью ложного конфликта, ни повторение передачи с вероятностью γ не окажут влияния на появление события A.

Доказательство утверждения 4. Для произвольной вершины $z \in X$ через $G_z(X_z)$ будем обозначать поддерево дерева $G(X)$ с корнем в вершине z. Если z — корень $G(X)$, то $G_z(X_z) = G(X)$.

Через $G_z^*(X_z^*)$ обозначим дерево, полученное удалением из вершины z и из последующих вершин меченого пакета. При этом, если $z \in L$ и $\xi(z) = n$, то дерево $G(z)$ описывает процесс разрешения конфликта кратности n, а дерево G_z^* — конфликта кратности $n-1$, т. е. $\tau(G_z) = \tau_n$ и $\tau(G_z^*) = \tau_{n-1}$.

Выделим в множестве L непересекающиеся подмножества L_1 и L_2:

$$L_i = \{z \in L : \xi(z) = i\}, \qquad i = 1, 2.$$

Введем в рассмотрение вершину y, определяемую следующим образом:

$$y: t(y) = \min_{z \in L_1 \cup (L_2 \cap \bar{E})} t(z),$$

т. е. y соответствует окну, в котором меченый пакет впервые либо в отсутствие шума участвует в конфликте кратности 2, либо участвует в конфликте кратности 1.

Из построения множества $\Gamma(x)$ следует, что

$$\tau(G)=\tau(G^*)-\tau(G_y^*)+\tau(G_y).$$

Рассмотрим ситуации, которые могут иметь место в вершине y:

1. Если $\xi(y)=1$, то $\tau(G_y)=\tau_1$, $\tau(G_y^*)=\tau_0$. Поскольку $\tau_0=\tau_1$, получаем $\tau(G)=\tau(G^*)$.

2. Если $\xi(y)=2$, то $\tau(G_y)=\tau_2$, $\tau(G_y^*)=0$.

Таким образом, имеем

$$\tau(G)=\begin{cases}\tau(G^*), & \text{если } \xi(y)=1,\\ \tau(G^*)+\tau_2, & \text{если } \xi(y)=2.\end{cases}$$

Поскольку $\tau(G)=\tau_k$ и $\tau(G^*)=\tau_{k-1}$, то, переходя к математическим ожиданиям рассматриваемых случайных величин, получаем

$$\text{(10)}\qquad \mathbf{M}[\tau_k]=\mathbf{M}[\tau_{k-1}]+\mathbf{M}[\tau_2]\Pr\{\xi(y)=2\}.$$

Для определения вероятности события $\{\xi(y)=2\}$ введем в рассмотрение вершину a

$$a\colon\ t(a)=\min_{z\in L_1\cup L_2} t(z).$$

Обозначим через B событие, состоящее в том, что в поддереве с корнем в вершине a среди вершин из $\bar{E}$ найдется такая вершина, в которой меченый пакет участвует в конфликте кратности 2, т. е. $B=\{\exists z\in X_a\cap\bar{E}\colon \xi(z)=2\}$.

Тогда из определения вершин a и y следует

$$\Pr\{\xi(y)=2\}=\Pr\{\xi(a)=2\cap B\}=\Pr\{B\,|\,\xi(a)=2\}\Pr\{\xi(a)=2\}=$$
$$=\Pr\{D\}\Pr\{\xi(a)=2\},$$

где D — событие, заключающееся в том, что в дереве, описывающем процесс разрешения конфликта кратности 2, присутствует вершина $z\in\bar{E}$, для которой $\xi(z)=2$.

Пусть x — корень дерева, описывающего процесс разрешения конфликта кратности 2. Тогда для $\Pr(D)$ справедлива формула

$$\Pr\{D\}=\Pr\{x\in\bar{E}\}+\Pr\{x\in E\}\Pr\{\exists z\in\Gamma(x):\xi(z)=2\}\Pr\{D\}=$$
$$=(1-q)+q(1+\gamma)/2\Pr\{D\},$$

откуда находим

$$\Pr\{D\}=2(1-q)/(2-q(1+\gamma)).$$

Учитывая, что $\Pr\{\xi(a)=2\}=P_k(q,\gamma)$, получаем

$$\text{(11)}\qquad \Pr\{\xi(y)=2\}=P_k(q,\gamma)2(1-q)/(2-q(1+\gamma)).$$

Подстановка (10) в (11) дает доказываемое равенство (5).

§ 5. Обсуждение результатов

Из полученных оценок пропускной способности для предлагаемого алгоритма следует, что для любой вероятности ложного конфликта $q<1$ существует значение γ такое, что $C^-(q,\gamma)>0$, т. е. возможна передача пакетов с ненулевой скоростью и конечной средней задержкой.

Выражения (7) и (8), оценивающие пропускную способность системы, дают возможность легко получить значение параметра γ, при котором оценки максимизируются:

$$\gamma_{\mathrm{opt}}=\begin{cases}0, & q\leqslant 1/4,\\ 2-1/\sqrt{q}, & q>1/4.\end{cases}$$

Если для вероятности ложного конфликта известен диапазон изменения $(q_{\min}, q_{\max})$, а точное значение q неизвестно, то, как показали расчеты, может быть выбрано постоянное значение γ_0 такое, при котором разность между величинами $C^-(q, \gamma_0)$ и $C^-(q, \gamma_{opt})$ была бы незначительной при $q_{\max}-q_{\min}\leqslant 0{,}2$, если $q_{\min}\leqslant q\leqslant q_{\max}$.

Эффект повышения пропускной способности по сравнению с АРК из [1, 4] при больших значениях q может быть объяснен следующим образом.

При повторении передачи с вероятностью γ ограничивается ветвление дерева, описывающего разрешение конфликта. Если конфликт ложный, то такое ограничение позволяет уменьшить среднее число вершин в дереве, т. е. целесообразно с точки зрения увеличения пропускной способности. С другой стороны, в дереве, описывающем разрешение истинного конфликта, повторение передачи приводит к появлению дополнительных вершин, что является фактором, уменьшающим пропускную способность. Поэтому оптимальное значение γ зависит от соотношения вероятностей истинного и ложного конфликтов в системе.

Рассмотренная в настоящей работе модификация АРК может быть аналогичным образом распространена и на алгоритм СТЕК-А из [2]. При этом численное исследование пропускной способности, сводящееся, как и в [2], к решению системы линейных уравнений, показало, что основной качественный вывод о работоспособности системы при всех значениях $q<1$ остается справедливым.

Отметим, что реализация описанного АРК осложняется необходимостью синхронизации датчиков псевдослучайных чисел у абонентов для выработки значений величины J_t. При отсутствии такой синхронизации невозможно точно определить границы между фазой разрешения конфликта и свободной фазой, т. е. проведенный анализ непригоден. Вместе с тем, как показало моделирование, при аналогичной модификации алгоритма СТЕК-А такая синхронизация не является необходимой.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность Б. С. Цыбакову и участникам руководимого им семинара в ИППИ АН СССР, а также Н. Г. Ермолаеву за внимание к этой работе и полезное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Евсеев Г. С., Ермолаев Н. Г.* Оценки характеристик разрешения конфликтов в канале со свободным доступом и шумом.– Пробл. передачи информ., 1982, т. 18, № 2, с. 101–104.
2. *Введенская Н. Д., Цыбаков Б. С.* Случайный множественный доступ в канал с ошибками.– Пробл. передачи информ., 1983, т. 19, № 2, с. 52–68.
3. *Ермолаев Н. Г.* Алгоритм случайного доступа адаптивная АЛОХА в канале с шумом.– В кн.: Тр. VIII Симпоз. по проблеме избыточности в информационных системах. Ч. 2. Тез. докл. Л., 1983, с. 18–21.
4. *Цыбаков Б. С., Михайлов В. А.* Свободный синхронный доступ пакетов в широковещательный канал с обратной связью.– Пробл. передачи информ., 1978, т. 14, № 4, с. 32–59.

Поступила в редакцию
18.VI.1984